



گزینه ۲

۱

تابع  $y = |x^2 - 1|$  در نقطه‌های  $x = \pm 1$  مشتق‌ناپذیر است و برای اینکه تابع  $f(x)$  فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، ضابطه آن باید  $f(x) = (x + 1)|x^2 - 1|$  یا  $f(x) = (x - 1)|x^2 - 1|$  باشد و در نتیجه  $a$  می‌تواند ۱ یا -۱ باشد.

گزینه ۱

۲

باتوجه به نمودار تابع ریشه ندارد و محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند پس گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند. نمودار تابع در  $x = 0$  مشتق‌پذیر نیست ولی گزینه ۲ در  $x = 0$  مشتق دارد.

گزینه ۳

۳

در ابتدا  $g(x) = f(2x)$  قرار می‌دهیم. اکنون آهنگ متوسط تغییرات تابع  $g$  را در بازه  $[1, 2]$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{f(4) - f(2)}{2 - 1} = f(4) - f(2)$$

حال در تساوی  $f(x+1) - f(x) = x^2 + x + \frac{4}{3}$  مقادیر  $x = 3, 2$  را قرار می‌دهیم:

$$x = 3 : f(4) - f(3) = 9 + 3 + \frac{4}{3}$$

$$x = 2 : f(3) - f(2) = 4 + 2 + \frac{4}{3}$$

با جمع دو رابطه بالا داریم:

$$f(4) - f(2) = \frac{62}{3}$$

روش اول:

از راه فرمول تعریف مشتق گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0$$

$f$  در  $x = 1$  مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۲: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 [x] - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)[x] = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}_0 \times \lim_{x \rightarrow 1} [x] = 0$$

$f$  در  $x = 1$  مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۳: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^6} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-1} = 0$$

$f$  در  $x = 1$  مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۴: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x] - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0$$

$f$  در  $x = 1$  فاقد مشتق است.

روش دوم:

با دقت در گزینه‌ها، می‌توان دید همگی آن‌ها دارای عامل صفر کننده  $x - 1$  هستند:

$$\text{گزینه ۱: } f(x) = (x-1)|x-1| \Rightarrow f'(x) = |x-1| + (x-1)(|x-1|)' \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{گزینه ۲: } f(x) = (x-1)^2 [x] \Rightarrow f'(x) = 2(x-1)[x] \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{گزینه ۳: } f(x) = (x-1) \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x-1} + (x-1)(\sqrt[3]{x-1})' = 0$$

$$\text{گزینه ۴: } f(x) = (x-1)[x] \Rightarrow f'(x) = 1 \times [x] \Rightarrow f'_+(1) = 1, f'_-(1) = 0$$

پس در گزینه ۴،  $f$  در  $x = 1$  مشتق‌پذیر نیست.

در ابتدا آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در  $x = -1$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x|x-2| \xrightarrow{x=-1} -x(x-2) = -x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(-1) = -2(-1) + 2 = 4$$

سپس آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه  $[-1, 3]$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{3 - (-3)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} : \text{میزان اختلاف اعداد به دست آمده}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در ثانیه چهارم} = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3}$$

$$= h(4) - h(3) = 2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5}}$$

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(1+t)^3}}$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = h'(4) = \frac{1}{2\sqrt{5^3}} = \frac{1}{10\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه‌ای}} = \frac{\frac{\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5}}}{\frac{1}{10\sqrt{5}}} = 5(\sqrt{5} - 2)$$

محل تلاقی خط  $y = 10x + 20$  با محور  $x$  ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 10x + 20 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

از آنجا که این خط در نقطه  $(-2, 0)$  بر منحنی  $f$  مماس است، پس:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 10 \end{cases}$$

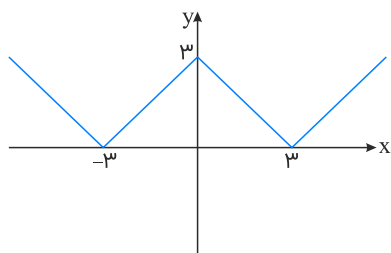
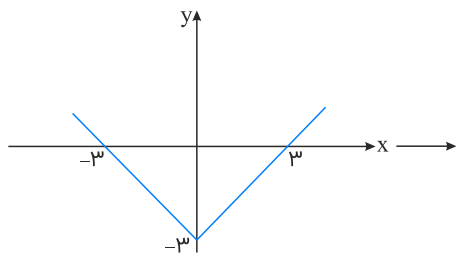
پس در مشتق‌گیری از تابع  $g(x)$  در  $x = -2$  دقت کنید که:  
اولاً:

$$f(x) - f''(x) \xrightarrow{x=-2} f(-2) - f''(-2) = 0$$

یعنی پرانتز اول، یک عامل صفرشونده است.

ثانیاً: در بین پرانتزهای بعدی هم  $x^2 - 4$  نیز عامل صفرشونده در  $x = -2$  محسوب می‌شود و لذا مشتق تابع  $g$  در  $x = -2$ ، به خاطر وجود دوتا عامل صفرشونده، حتماً صفر است.

بهترین کار این است که نمودار تابع  $y = ||x| - 3|$  را رسم کنیم. کافی است نمودار  $y = |x|$  را سه واحد به سمت پایین برده و سپس قرینه قسمت‌هایی که در زیر محور  $x$  ها واقع شده‌اند را در بالای محور رسم کنیم:



واضح است که این تابع در  $\mathbb{R}$  دارای سه نقطه گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر در  $3, 0, -3$  است. حالا باتوجه به گزینه‌ها، دامنه این تابع را محدود می‌کنیم:

صفر نقطه مشتق‌ناپذیر  $\Rightarrow (-3, -1) \Rightarrow$  بازه  $a = -1 \Rightarrow$  گزینه ۱

صفر نقطه مشتق‌ناپذیر  $\Rightarrow (-3, 0) \Rightarrow$  بازه  $a = 0 \Rightarrow$  گزینه ۲

یک نقطه مشتق‌ناپذیر در  $0 \Rightarrow (-3, 2) \Rightarrow$  بازه  $a = 2 \Rightarrow$  گزینه ۳

دو نقطه مشتق‌ناپذیر در  $0, 3 \Rightarrow (-3, 4) \Rightarrow$  بازه  $a = 4 \Rightarrow$  گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط در بازه } [۲, ۴]: \frac{f(۴) - f(۲)}{۴ - ۲} = \frac{۱۲ \log_۳^{۱۶} - ۰}{۲} = ۶ \log_۳^{۱۶}$$

$$f'(۲): \text{آهنگ لحظه‌ای در } x = ۲$$

برای مشتق‌گیری در  $x = ۲$  فقط از عامل صفرکننده یعنی  $x^۲ - ۴$  مشتق می‌گیریم:

$$(x^۲ - ۴)' \log_۳^{(x^۲+x-۴)} = ۲x \log_۳^{(x^۲+x-۴)} \xrightarrow{x=۲} ۴ \log_۳^۲$$

$$\text{نسبت: } \frac{۶ \log_۳^{۱۶}}{۴ \log_۳^۲} = \frac{۳}{۲} \log_۳^{۱۶} = \frac{۳}{۲} (۴) = ۶$$

در شکل نیم‌مماس سمت چپ بر نمودار تابع  $y = |x^۳ - ۱|$  در  $x = ۱$  رسم شده است. شیب نیم‌مماس چپ در  $x = ۱$  برابر  $f'_-(۱)$  می‌شود.

$$\begin{aligned} f'_-(۱) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^۳ - ۱| - ۰}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^۳ - ۱)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x^۲ + x + ۱)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x^۲ + x + ۱) = -۳ \end{aligned}$$

نیم‌مماس سمت چپ از نقطه  $(۱, ۰)$  می‌گذرد و دارای شیب  $-۳$  است:

$$y - ۰ = -۳(x - ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۳$$

پس مقدار  $a$  برابر با  $۳$  است.

$$M'(t) = \frac{1}{۲\sqrt{t}} + ۶t^۲ \Rightarrow M'(۴) = \frac{1}{۲ \times ۲} + ۶(۱۶) = \frac{۳۸۵}{۴}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۴) - f(۰)}{۴ - ۰} = \frac{۱۳۰}{۴}$$

$$\frac{۳۸۵}{۴} - \frac{۱۳۰}{۴} = \frac{۲۵۵}{۴} = ۶۳/۷۵$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x - 1| + a|x^2 - 1|}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$f'_+(1) = 1 + a(2), \quad f'_-(1) = -1 + a(-2) \Rightarrow 1 + 2a = -2a - 1$$

$$\Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

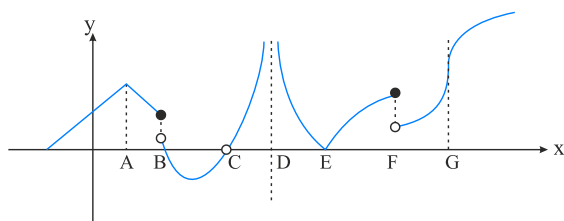
یک تابع در نقاط زیر مشتق‌ناپذیر است (نقاطی که در دامنه حضور دارند):

(۱) نقاط ناپیوستگی

(۲) نقاطی که در آن‌ها مشتق چپ و راست متناهی باشد اما برابر نباشد.

(۳) نقاطی که یکی از مشتق‌های چپ و راست نامتناهی باشد.

(۴) نقاطی که هر دو مشتق چپ و راست نامتناهی باشد.



حال در تابع  $f(x)$  داریم:

نقاط C و D عضو دامنه نیستند. در نقطه A مشتق چپ و راست برابر نیست. نقاط B و F ناپیوسته هستند. در نقطه E مشتق چپ و راست برابر نیست. در نقطه G مقدار مشتق نامتناهی است.

$$y = f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} y' = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) f'\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4} \times f'\left(\frac{1}{2}\right) f'\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{-1}{4} f'\left(\frac{1}{2}\right) f'(0)$$

$$\text{داریم } x = 0 \text{ راست همسایگی } f(x) = -(2x - 1) \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow f'(0) = -2$$

$$\text{داریم } x = \frac{1}{2} \text{ چپ همسایگی } f(x) = -(2x - 1) \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4} \times (-2) \times (-2) = -1$$

تذکر: برای محاسبه  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ، چون زمانی که  $x \rightarrow 2^+$ ، داریم:  $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{2}^-$ ، بنابراین مشتق چپ  $\frac{1}{2}$  را محاسبه می‌کنیم.

رشد افزایشی باروری در قسمت صعودی نمودار رخ می‌دهد. بنابراین باید بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن نمودار صعودی است را بیابیم. باتوجه به نمودار این اتفاق در حدود سال‌های ۱۳۵۲ تا ۱۳۶۲ اتفاق افتاده است. آهنگ متوسط تغییرات برای یک تابع مانند  $f(x)$  در نقاط  $x = a$  تا  $x = b$  ( $b > a$ ) برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

درنتیجه داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر باروری} = \frac{f(1362) - f(1352)}{1362 - 1352} = \frac{6/5 - 6/2}{10} = \frac{0/3}{10} = 0/03$$

احتمالاً برای محاسبه  $f'_+(3)$  سراغ ضابطه آخر رفته‌اید و اینگونه عمل کرده‌اید:

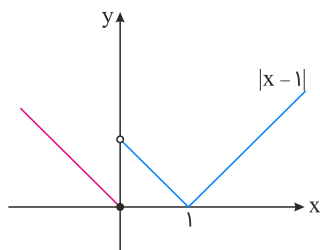
$$y = x^2 + 6 \Rightarrow y' = 2x \xrightarrow{x=3} 6 \Rightarrow \text{گزینه ۱!}$$

اما یادتان نرود! شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است. برای وجود مشتق راست در نقطه  $x = 3$ ، لازم است که تابع در این نقطه، پیوستگی راست داشته باشد:

$$\begin{cases} f(3) \xrightarrow{\text{ضابطه وسط}} 18 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \xrightarrow{\text{ضابطه آخر}} \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + 6 = 15 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید تابع  $f$  در این نقطه، از راست ناپیوسته و لذا مشتق‌ناپذیر است.

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل تابع در  $x = 0$  از راست پیوسته نیست پس  $f'_+(0)$  موجود نیست و تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد (گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند).

به علاوه در  $x = 1$  نقطه گوشه داریم و تابع نمی‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر باشد (گزینه ۴ حذف می‌شود). در  $x = 0$  مشتق چپ دارد پس اگرچه  $f'(0)$  موجود نیست ولی تابع در فاصله  $(-\infty, 0]$  مشتق‌پذیر است.



آهنگ لحظه‌ای در  $x = ۵$  همان  $f'(۵)$  است.

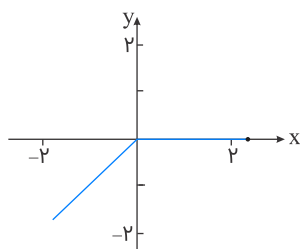
$$f(x) = (۵x + ۲)^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow f'(x) = ۵ \times \frac{۲}{۳} (۵x + ۲)^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$f'(۵) = \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۵x + ۲}} \xrightarrow{x=۵} \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۷}} = \frac{۱۰}{۹}$$

$$f' + (۰) = \lim_{x \rightarrow ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \rightarrow ۰^+} \frac{|x| [\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow ۰^+} \frac{x [۰^+]}{x} = ۰$$

$$f' - (۰) = \lim_{x \rightarrow ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \rightarrow ۰^-} \frac{|x| [\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow ۰^-} \frac{-x [۰^-]}{x} = -۱ \times -۱ = ۱$$

با توجه به اینکه مشتق راست و چپ در نقطه  $x = ۰$  موجود و نابرابر است، تابع در نقطه  $x = ۰$  نقطه گوشه دارد. نمودار این تابع اطراف  $x = ۰$  به صورت زیر است:



$$\begin{aligned} \text{آهنگ تغییر متوسط } f \text{ در } [-۶, ۲] &= \frac{f(۲) - f(-۶)}{۲ - (-۶)} = \frac{۸ + ۱ - (-۲۴ + ۳)}{۸} \\ &= \frac{۳۰}{۸} = \frac{۱۵}{۴} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow ۴ + \frac{-۱}{۲\sqrt{۳-c}} = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{۳-c}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳ - c = ۴ \\ &\Rightarrow c = -۱ \end{aligned}$$